VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

DIFERENČNÍ POČET A DIFERENČNÍ ROVNICE
DIFFERENCE CALCULUS AND DIFFERENCE EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Denys Bukotin
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Denys Bukotin**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.**
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Diferenční počet a diferenční rovnice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diferenční počet je diskrétní analogií diferenciálního počtu; vykazuje řadu analogií se spojitým případem, má však i svá mnohá specifika.
Diferenční rovnice se objevují jako diskrétní protějšky diferenciálních rovnic, nebo při popisu modelů, které jsou svou povahou čistě diskrétní.

Cíle bakalářské práce:

1. Výklad diferenčního počtu s poukázáním na analogie či rozdíly při srovnání s diferenciálním počtem.
2. Přehled vybraných typů diferenčních rovnic s popisem metody řešení či s vyšetřením některých kvalitativních vlastností.
3. Detailní prozkoumání konkrétního typu diferenční rovnice a její interpretace při řešení problémů z praxe.

Seznam doporučené literatury:

CULL, P., M. FLAHINE a R. ROBSON. Difference Equations: From Rabbits to Chaos. Springer, 2005.

KELLEY, W. a A. PETERSON, Difference Equations, An Introduction with Applications. Academic Press, 2000.

EKAYDI, S. An Introduction to Difference Equations. Springer, 2006.

LAKSHMIKANTHAM, V. a D. TRIGIANTE. Theory Of Difference Equations Numerical Methods And Applications. CRC Press, 2002.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá využitím diferenčních rovnic při popisu reálných jevů. Cílem této práce je ukázat aplikovatelnost tohoto druhu rovnic na některé modely. Uvádějí se základní pojmy z teorie diferenčního počtu, diferenčních rovnic a teorie stability. Rovněž se diskutují analogie s teorií diferenciálních rovnic. Následně se zkoumá matematický model a chování jeho řešení. Na příkladě Nicholsonova–Baileyho populačního modelu ukazujeme, že diferenční rovnice jsou užitečným nástrojem při popisu dějů z reálného života.

Abstract

This thesis deals with application of difference equations for describing real processes. The aim of this work is to show the applicability of this kind of equations for solving some problems. We define some concepts of difference calculus, theory of difference equations and stability theory, also we show some similarities with theory of diferential equations. Then we investigate a particular mathematical model and the behavior of its solutions. We examine Nicholson-Bailey model, as an example of population models and we show that difference equations are a useful tool for discribing real processes.

Klíčová slova

Diferenční počet, diferenční rovnice, teorie stability, Nicholsonův–Baileyho model.

Keywords

Difference calculus, difference equations, stability theory, Nicholson–Bailey model.

BUKOTIN, D. *Diferenční počet a diferenční rovnice.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 38 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Diferenční počet a diferenční rovnice* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Pavla Řeháka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

Denys Bukotin

Rád bych poděkoval všem, kdo mě během psaní této práce podporovali, zejména mému vedoucímu panu docentu Pavlu Řehákovi za ochotu a celkovou pomoc s prací. Samozřejmě, velké díky patří rodičům a všem, kteří mi pomohli napsat tuto práci v češtině.

Denys Bukotin

Obsah

Úvod

Matematické výpočty jsou mnohdy založeny na řešení rovnic, které nám umožňují vypočítat hodnotu funkce rekurzivně z nějaké určité množiny hodnot. Takové rovnice se nazývají *diferenční* nebo také *rekurentní*. Existuje velké množství oborů, ve kterých se můžeme setkat s funkcemi definovanými jen v izolovaných bodech. S problémy, které lze řešit pomocí diferenčních rovnic se můžeme často setkat i ve středoškolské matematice, zejména v kombinatorice, finanční matematice a teorii pravděpodobnosti. Diferenční rovnice se vyskytují také v elektrotechnice – při analýze elektrických obvodů, v dynamických systémech, v biologii – při modelování životních cyklů, v chemii a jiných oborech.

Cílem této práce je vypracovat teorii související s diferenčním počtem a diferenčními rovnicemi a porovnat tento druh rovnic s diferenciálními rovnicemi. Poté uvést možnosti aplikace těchto rovnic, zejména vypracovat matematický model a navíc použít některé pojmy a nástroje z teorie stability na posouzení chování řešení vybraného matematického modelu.

Diferenční rovnice lze chápat také jako diskretizaci diferenciálních rovnic. Než začneme mluvit o rovnicích a různých způsobech jejich řešení, uvedeme v úvodní části pár motivačních příkladů. Dále, v kapitole 2 vysvětlíme nejdůležitější pojmy z teorie diferenčního počtu. Zavedeme pojem *diference* (jako analogie derivace), *sumace* nebo také *antidiference* a *určité sumace* (jako analogie neurčitého, resp. určitého integrálu). Uvedeme některé výsledky diferenčního počtu a ukážeme podobnosti nebo rozdílnosti v porovnání s diferenciálním počtem. Dále následuje kapitola 3, ve které se věnujeme diferenčním rovnicím, jejich klasifikaci a způsobům řešení. V této práci poukážeme i na analogie s diskrétními protějšky diferenčních rovnic, totiž diferenciálními rovnicemi. V kapitole 4 stručně probereme některé pojmy z teorie stability, které budeme potřebovat při vyšetřování námi zvolených matematických modelů. Těmto modelům (které jsou svou povahou čistě diskrétní) se věnujeme v kapitole 5, zejména ukazujeme, jak lze aplikovat teorii diferenčních rovnic (spec. teorii stability) při zkoumání vlastností jejich řešení.

1 Motivační úlohy

Diferenční rovnice se objevují u modelů, které jsou čistě diskrétní. První úloha je klasickým příkladem použití těchto rovnic ve finanční matematice.

Příklad 1.1. V květnu roku 2008 si pan Novák vložil do banky 5000 korun na svůj spořící účet. Úrok, který nabízí banka je 6 % ročně s tím, že každý měsíc se přičítají peníze na účet. Pan Novák na svůj účet zcela zapomněl, ale v květnu roku 2018 si na něj zase vzpomněl. Kolik peněz má pan Novák na účtu v květnu roku 2018, tzn. po 10 letech?

Nechť $x(t)$ je částka, kterou má pan Novák na účtu po t měsících a $x(0) = 5000$. Pokud je roční úrok 6 %, pak je měsíční 0.5 %. Nyní můžeme sestavit rovnici ve tvaru

$$x(t+1) = x(t) + 0.005x(t) = (1.005)x(t),$$

pro $t = 0, 1, 2, \cdots$. Sestavíme rovnosti pro další měsíce

$$\begin{aligned} x(1) &= 5000(1.005) \\ x(2) &= 5000(1.005)^2 \\ &\vdots \\ x(t) &= 5000(1.005)^t. \end{aligned}$$

Po deseti letech, tzn. po 120 měsících, pan Novák má na svém účtu

$$x(120) = 5000(1.005)^{120} \backsimeq 9097 \text{ korun}.$$

Kdyby chtěl zdvojnásobit základní částku, musel by počkat ještě 19 měsíců. To jsme vypočítali z rovnice

$$\begin{aligned} 10000 &= 5000(1.005)^t \\ t &\backsimeq 139. \end{aligned}$$

To znamená, že v lednu roku 2020 by měl pan Novák na účtu částku 10000 korun.

Později ukážeme, že tento příklad se dá vyřešit pomocí algoritmu pro řešení diferenčních rovnic s konstantními koeficienty, a to v kapitole 3. Dále následuje o něco těžší příklad.

Příklad 1.2. Kvůli přídělovému systému vztahujícímu se na vodu může pan Novák zavlažovat ornici pouze mezi devátou hodinou ráno a devátou hodinou večer (přes den). Předpokládejme, že může zásobit ornici vodou ve množství q s tím, že se polovina tohoto množství vody ztratí odpařením nebo absorpcí od deváté hodiny večer do deváté hodiny ráno (přes noc). Původně ornice obsahovala množství I vody. Kolik množství vody bude v půdě po t 12-hodinových cyklech?

Nechť $y(t)$ je množství vody v půdě na konci t-tých dvanácti hodin. Zkomplikujeme tento příklad tím, že ho vyřešíme obecně pro ztráty vody odpařením nebo absorpcí ve množství a.

Nyní pro t - liché,

$$y(t+2) = (1-a)y(t) + q,$$

pro t - sudé,

$$y(t+2) = (1-a)y(t) + (1-a)q,$$

obecně tehdy platí

$$y(t+2) - (1-a)y(t) = \frac{q}{2}(2 - a - a(-1)^t).$$

Počáteční podmínky jsou $y(0) = I, y(1) = I + q$.

Tuto rovnici zatím vyřešit neumíme, ale v kapitole 3, ve které se věnujeme teorii diferenčních rovnic, tento příklad dořešíme.

2 Teorie diferenčního počtu

Diferenční počet může být chápán jako diskrétní analogie spojitého diferenciálního a integrálního počtu, ovšem má svá četná specifika. Zavedeme pojem *diference* a uvedeme další důležité pojmy diferenčního počtu.

Definice 2.1. Pokud je dán bod $x \in \mathbf{R}$, číslo $h > 0$ a reálná funkce $f(x)$ je definovaná v bodech x a $x + h$, potom číslo $f(x+h) - f(x)$ se nazývá *diference funkce* $f(x)$ v bodě x a označíme jej

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x). \tag{2.1}$$

Číslo h se nazývá *diferenční krok*.

Abychom mohli určit diferenci funkce $f(x)$ v bodech $x, x+h, \cdots, n \in \mathbf{N}$ musí být definiční obor funkce $f(x)$ množinou ekvidistantních bodů $M = \{x + nh)\}_{n=0}^{\infty}$. Bez újmy na obecnosti lze tuto množinu transformovat na $M \subseteq \mathbf{N}$. Substitucí lze docílit toho, že $h = 1$ a to tak, že vezmeme $f(x) = g(xh)$, potom

$$\begin{aligned}\Delta g(t) = g(t+h) - g(t) &= g(xh+h) - g(xh)\\ &= f(x+1) - f(x) = \Delta f(x).\end{aligned}$$

To znamená, že k výpočtu diference stačí, aby funkce byla definovaná pouze v určitých bodech $x, x+1, \cdots$ a také lze říct, že $M = \{x, x+1, \cdots\} \subseteq \mathbf{Z}$. Dále uvedeme některé základní vlastnosti diference funkce.

Věta 2.2. Pro všechna n, pro něž jsou současně definovány posloupnosti $\Delta x(n)$ a $\Delta y(n)$, platí:

1. $\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$, kde $a, b \in \mathbf{R}$;
2. $\Delta(x(n) \cdot y(n)) = x(n)\Delta y(n) + y(n+1)\Delta x(n)$;
3. $\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$, pro $y(n)y(n+1) \neq 0$.

Obdobné vlastnosti platí i u diferenciálního počtu. Můžeme si všimnout toho, že operátor Δ je analogií operátoru derivace $'$ v diferenciálním počtu.

1. $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$;
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$;
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, pro $g^2(x) \neq 0$.

Jednoduchý vzorec pro derivaci složené funkce $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ pro diskrétní případ neexistuje. V diferenciálním počtu derivace mocniny je definovaná jako

$$(x^k)' = kx^{k-1},$$

analogický vzorec v diferenčním počtu pro výpočet diference mocniny je velmi komplikovaný:

$$\Delta n^k = (n+1)^k - n^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i - x^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^i,$$

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}$$

Proto se zavadí nový pojem *zobecněné mocniny*.

Definice 2.3. Pokud $n, k \in \mathbf{N}$, pak *zobecněná mocnina* $n^{(k)}$ je definovaná:

$$n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Potom pro diferenci zobecněné mocniny platí:

$$\begin{aligned}
\Delta n^{(k)} &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} \\
&= (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2) - n(n-1) \\
&\quad \cdots(n-k+2)(n-k+1) \\
&= n(n-1)\cdots(n-k+2)k = kn^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Poznámka 2.4. Vzorec na výpočet diference zobecněné mocniny lze zapsat i pomocí gama funkce. Zobecněná mocnina potom je definovaná

$$n^{(k)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)},$$

a diference zobecněné mocniny

$$\Delta n^{(k)} = k\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+2)},$$

Vzorec pro diferenci vyššího řádu odvodíme pomocí matematické indukce.

Definice 2.5. Pokud $n, k \in \mathbf{N}$ a $x(n)$ je posloupnost, potom
pro $k = 0$: $\Delta^0 x(n) = x(n)$;
pro $k = 1$: $\Delta^1 x(n) = \Delta x(n)$;
pro $k = 2$: $\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n)) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$;
pro k - libovolné: $\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} x(n+k-i)$.

Dalším pojmem, který se používá v teorii diferenčního počtu, je *operátor posunu.*

Definice 2.6. Pokud $x(n)$ je posloupnost, potom *operátor posunu* je definován vztahem

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Pro vyšší řád platí

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \Delta^{k-i} x(n).$$

Definice 2.7. I je *"identita"*, pokud pro $n \in \mathbf{N}$ platí $Ix(n) = x(n)$.

Poznámka 2.8. Pokud E je posun a I je identita, potom platí $\Delta = E - I$.

Dále nadefinujeme posloupnost, kterou jsme diferencovali, pokud je známá její diference.

Definice 2.9. Pokud $x(n)$ a $X(n)$ jsou posloupnosti a platí pro ně $\Delta X(n) = x(n)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, potom posloupnost $X(n)$ je *antidiferencí posloupnosti* $x(n)$ nebo také *neurčitou sumou* $x(n)$ a značíme ji

$$X(n) = \Delta^{-1} x(n).$$

Pro operátor antidiference Δ^{-1} se také používá označení Σ. Dále budeme používat pro označení sumy pouze symbol Σ.

Věta 2.10. Pro posloupnosti $x(n)$ a $y(n)$ platí:

1. pokud $\Delta x(n) = 0$, potom $x(n) = c$;
2. pokud $\Delta x(n) = \Delta y(n)$, potom $x(n) = y(n) + c$, kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

Poznámka 2.11. Z věty 2.10 vyplývá, pokud $X(n)$ je sumací $x(n)$, potom existuje nekonečně mnoho posloupností $t(n)$, které jsou sumacemi $x(n)$

$$t(n) = \Sigma x(n) = X(n) + c,$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je vhodná konstanta.

Uvedeme některé základní vlastnosti antidiference.

Věta 2.12. Pro posloupnosti $x(n)$ a $y(n)$ platí:

1. $\Sigma(ax(n) + by(n)) = a\Sigma x(n) + b\Sigma y(n), \text{kde } a, b \in \mathbf{R}$;
2. $\Sigma(x(n)\Delta y(n)) = x(n)y(n) - \Sigma(y(n+1)\Delta x(n))$ (tzv. *sumace per partes*);

Věta 2.13. Pro elementární posloupnosti uvedeme jejich antidiference:

1. $\Sigma n^{(k)} = \frac{n^{(k+1)}}{k+1} + c$, pro $n, k \in \mathbf{N}$;
2. $\Sigma a = an + c$, pro $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$;
3. $\Sigma q^n = \frac{q^n}{q-1} + c$, pro $q \in \mathbf{R} - \{1\}$, $n \in \mathbf{N}$,

kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

Poznámka 2.14. Pro antidiference goniometrických funkcí platí:

1. $\Sigma \sin(\alpha n) = a \sin(\alpha n) + b \cos(\alpha n) + c$;
2. $\Sigma \cos(\alpha n) = d \sin(\alpha n) + e \cos(\alpha n) + c$,

kde $a, b, d, e \in \mathbf{R}$ jsou jisté konstanty a $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

Doposud jsme se zabývali pojmem antidiference nebo také neurčité sumace. Podobně jako se v diferenciálním počtu zavadí pojem určitého integrálu, v diferenčním počtu můžeme zavést pojem *určité sumace.*

Definice 2.15. Pokud $x(n)$ je posloupnost, a a b jsou přirozená čísla $a \leq b$, potom *určitá suma* posloupnosti $x(n)$ na diskrétním intervalu $\langle a, b\rangle = \{a, a+1, \cdots, b\} \subseteq \mathrm{N}$ je

$$\sum_{n=a}^{b} x(n) = x(a) + x(a+1) + \cdots + x(b-1) + x(b).$$

Vztah mezi neurčitou a určitou sumou popisuje následující věta.

Věta 2.16. Pokud je posloupnost $X(n)$ je neurčitou sumou posloupnosti $x(n)$, $a, b \in \mathbf{N}$ a $a \leq b$, potom platí

$$\sum_{n=a}^{b-1} x(n) = [X(n)]_a^b = X(b) - X(a).$$

Všimněme si analogie s Newtonovým-Leibnitzovým vzorcem z integrálního počtu:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Samozřejmě můžeme počítat antidiference pro diference vyšších řádů. Proto zavedeme pojem *k-té antidiference.*

Definice 2.17. Pokud $n, k \in \mathbf{N}$ a $f(n)$ je posloupnost, položme $\overset{(0)}{\sum} x(n) = x(n)$ a $\overset{(1)}{\sum} x(n) = \sum x(n)$, potom *k-tá antidiference* je definovaná

$$\overset{(k)}{\sum} x(n) = \sum \left[\overset{(k-1)}{\sum} x(n) \right].$$

Podle poznámky 2.11 víme, že antidiference posloupnosti není určená jednoznačně a že těchto posloupností je nekonečně mnoho. Ukážeme tedy, že je nekonečně mnoho posloupností, které jsou k-tou diferencí $x(n)$.

Věta 2.18. Pokud $x(n)$ je posloupnost, $n, k \in \mathbf{N}$, potom platí

$$\Delta^k x(n) = 0 \Leftrightarrow x(n) = c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_0,$$

kde $c_i \in \mathbf{R}$ jsou libovolné konstanty.

V následující větě ukážeme, jak se liší posloupnosti, jejichž k-té diference se rovnají.

Věta 2.19. Pokud $x(n)$, $y(n)$ jsou posloupnosti, $n, k \in \mathbf{N}$ a $a \leq b$, potom platí

$$\Delta^k x(n) = \Delta^k y(n) \Leftrightarrow x(n) = y(n) + c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_0,$$

kde $c_i \in \mathbf{R}$ jsou libovolné konstanty.

3 Teorie diferenčních rovnic

V této kapitole uvedeme různé druhy diferenčních rovnic. Ukážeme některé způsoby řešení takových rovnic a pomocí těchto metod vyřešíme příklady z kapitoly 1.

Definice 3.1. Nechť $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^{k+1} \to \mathbf{R}$ je funkce $k+2$ proměnných, potom rovnice tvaru

$$f(n, y, \Delta y, \cdots, \Delta^k y) = 0 \tag{3.1}$$

je *diferenční rovnicí k. řadu* definovanou v $\mathbf{N}$. Každá posloupnost $y = \varphi(n)$, která pro všechna $n \in \mathbf{N}$ splňuje rovnici (3.1), je *partikulárním řešením* této rovnice. *Obecným řešením* je potom vzorec zahrnující všechna partikulární řešení.

Poznámka 3.2. Zvláštním případem tohoto druhu rovnic je rovnice tvaru:

$$\Delta^k y = x(n). \tag{3.2}$$

Obecné řešení této rovnice je polynom stupně $k-1$ ve tvaru:

$$y = \varphi(n) + c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0,$$

kde $\varphi(n)$ je partikulární řešení rovnice (3.2) a $c_{k-1}, c_{k-2}, \cdots, c_0$ jsou libovolné konstanty.

S diferenčními rovnicemi ve tvaru (3.1) dále příliš pracovat nebudeme. Uvedeme jiný tvar diferenčních rovnic:

Definice 3.3. Nechť $g : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^{k+1} \to \mathbf{R}$ je funkce $k+2$ proměnných, potom rovnice tvaru

$$g(n, y(n), y(n+1), \cdots, y(n+k)) = 0, \tag{3.3}$$

je *diferenční rovnicí* definovanou v $\mathbf{N}$. Každá posloupnost $y = \varphi(n)$, která pro všechna $n \in \mathbf{N}$ splňuje rovnici (3.3), je *partikulárním řešením* této rovnice. *Obecným řešením* je potom vzorec zahrnující všechna partikulární řešení. Počáteční podmínky diferenční rovnice k-tého řádu, kde $n_0 \in \mathbf{Z}$ definujeme takto:

$$y(n_0) = y_0, \quad y(n_0+1) = y_1, \quad \cdots, \quad y(n_0+k-1) = y_{k-1}. \tag{3.4}$$

Poznámka 3.4. Každou diferenční rovnici tvaru (3.1) lze převést na rovnici tvaru (3.3) a naopak.

Definice 3.5. *Lineární diferenční rovnice k-tého řadu* je rovnice tvaru

$$a_0(n)y(n) + a_1(n)y(n+1) + \cdots + a_k(n)y(n+k) = u(n), \tag{3.5}$$

kde $u(n), a_0(n), \cdots, a_k(n)$ jsou libovolné posloupnosti definované v $\mathbf{N}$, přičemž $a_k(n)$ a $a_0(n)$ jsou nenulové pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Pokud posloupnosti $a_0(n), \cdots, a_k(n)$ jsou konstantní, pak hovoříme o *diferenční rovnici s konstantními koeficienty.* Pokud pro všechna $n \in \mathbf{N}$ $u(n) = 0$, pak je rovnice *homogenní.*

Věta 3.6. Nechť dáno k hodnot $y(n_0), y(n_0+1), \cdots, y(n_0+k-1)$ v k po sobě jdoucích bodech $n_0, n_0+1, \cdots, n_0+k-1$ z definičního oboru $\mathbf{N}$, potom existuje právě jedno řešení lineární diferenční rovnice (3.5) v $\{n_0, n_0+1, \cdots, n_0+k-1\}$, které splňuje počáteční podmínky (3.4).

Věta 3.7. Rovnice $a_0(n)y(n) + a_1(n)y(n+1) + \cdots + a_k(n)y(n+k) = 0$ má pro všechna $n \in \mathbf{N}$ vždy *triviální řešení* $y(n) = 0$.

Věta 3.8. Nechť $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots, \varphi_k(n)$ jsou partikulární řešení homogenní diferenční rovnice

$$a_0(n)y(n) + a_1(n)y(n+1) + \cdots + a_k(n)y(n+k) = 0, \tag{3.6}$$

kde $a_k(n) \neq 0$, $a_0(n) \neq 0$ a $c_1, c_2, \cdots, c_k$ jsou libovolné koeficienty, pak funkce tvaru $y(n) = c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n) + \cdots + c_k\varphi_k(n)$ je řešením této rovnice.

Definice 3.9. Posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots, \varphi_k(n)$ jsou lineárně *závislé* v $\mathbf{N}$, pokud existuje alespoň jedna nenulová konstanta c_i taková, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je splněná rovnice

$$c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n) + \cdots + c_k\varphi_k(n) = 0.$$

V opačném případě jsou tyto posloupnosti *nezávislé*.

Definice 3.10. Pokud jsou posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots, \varphi_k(n)$, které jsou partikulárními řešeními diferenční rovnice (3.6), lineárně nezávislé v $\mathbf{N}$, potom tvoří *fundamentální systém řešení*.

Věta 3.11. Řešení $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots, \varphi_k(n)$ jsou lineárně nezávislé právě když existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\det W(n_0) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(n_0) & \varphi_2(n_0) & \cdots & \varphi_k(n_0) \\ \varphi_1(n_0+1) & \varphi_2(n_0+1) & \cdots & \varphi_k(n_0+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(n_0+k-1) & \varphi_2(n_0+k-1) & \cdots & \varphi_k(n_0+k-1) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Tato matice se nazývá *Casoratiho matice*, která je analogií *Wronského matice* u diferenciálních rovnic. Podobně jako determinantu Wronského matice říkáme *Wronskián*, tak determinantu Casoratiho matice říkáme *Casoratián*.

Poznámka 3.12. Pokud existuje alespoň jedno n_0 takové, že $\det W(n_0) \neq 0$ (Casoratián je nenulový), pak řešení $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots, \varphi_k(n)$ jsou lineárně nezávislá.

Věta 3.13. Pokud posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots, \varphi_k(n)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.6) v $\mathbf{N}$, potom je *obecné řešení* této rovnice ve tvaru

$$y(n) = c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n) + \cdots + c_k\varphi_k(n),$$

kde $c_1, c_2, \cdots, c_k$ jsou libovolné konstanty.

Věta 3.14. Pokud $\psi_1(n)$ je řešením rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(n)y(n+j) = u(n)$ a $\psi_2(n)$ je řešením rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(n)y(n+j) = v(n)$, potom $\alpha\psi_1(n) + \beta\psi_2(n)$ je řešením rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(n)y(n+j) = \alpha u(n) + \beta v(n)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Poznámka 3.15. Pokud $\psi_1(n)$ a $\psi_2(n)$ jsou libovolná řešení nehomogenní rovnice (3.3), pak jejich rozdíl $\psi_1(n) - \psi_2(n)$ je řešením homogenní rovnice (3.6).

Poznámka 3.16. Pokud $Y(n) = \sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j(n)$ je obecné řešení homogenní rovnice (3.6) a $Z(n) = \psi(n)$ je partikulární řešení rovnice (3.3), potom obecné řešení rovnice (3.3) je tvaru

$$y(n) = Y(n) + Z(n) = \sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j(n) + \psi(n). \tag{3.7}$$

Konstanty $c_1, c_2, \cdots, c_k$ lze jednoznačně určit dosazením počátečních podmínek do tvaru (3.7).

Dále se budeme zabývat homogenními diferenčními rovnicemi s konstantními koeficienty. V tomto případě hledáme netriviální řešení rovnice k-tého řadu tvaru:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \cdots + a_k y(n+k) = 0, \tag{3.8}$$

kde a_i jsou reálné konstanty a $a_k(n) \neq 0$, $a_0(n) \neq 0$. K obecnému řešení diferenční rovnice nás povedou kořeny příslušné charakteristické rovnice.

Definice 3.17. *Charakteristickou rovnicí* diferenční rovnice (3.8) je algebraická rovnice tvaru:

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k = 0, \tag{3.9}$$

Věta 3.18. Pokud $\lambda \neq 0$, potom posloupnost $y(n) = \lambda^n$ je řešením rovnice (3.8) právě tehdy, když λ je řešením rovnice (3.9).

Věta 3.19. Posloupnosti $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_k^n$ pro $\lambda_i \neq \lambda_j$, kde $i \neq j$, $\lambda_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \cdots, k$ jsou lineárně nezávislé v $\mathbf{N}$.

Rovnice (3.9) má nejvýše k různých nenulových kořenů λ_i a podle vět 3.18 a 3.19 známe příslušný počet lineárně nezávislých partikulárních řešení rovnice (3.8). Dalším naším úkolem je nalézt fundamentální systém řešení v závislosti na tvaru kořenu charakteristické rovnice (3.9).

Věta 3.20. Pokud $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_k^n$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, kde $i \neq j$, $\lambda_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \cdots, k$ jsou kořeny charakteristické rovnice (3.9), potom rovnice (3.8) má obecné řešení tvaru:

$$y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n,$$

kde $c_1, c_2, \cdots, c_k$ jsou libovolné koeficienty.

Ukážeme řešení příkladu 1.1 z kapitoly 1.

Nechť $x(t)$ je částka, kterou má pan Novák na účtu po t měsících a $x(0) = 5000$. Pokud roční úrok je 6 %, potom měsíční je 0.5 %. Nyní můžeme sestavit rovnici ve tvaru

$$x(t+1) = x(t) + 0.005x(t) = (1.005)x(t),$$

pro $t = 0, 1, 2, \cdots$. Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda - 1.005 = 0.$$

Kořen této rovnice je $\lambda = 1.005$, podle věty (3.20) je řešení ve tvaru

$$y(t) = c_1 \cdot (1.005)^t.$$

Počáteční podmínka je v našem případě $y(0) = 5000$. Nyní snadno najdeme koeficient $c_1 = 5000$, a obdržíme řešení počáteční úlohy

$$y(t) = 5000 \cdot (1.005)^t.$$

Dále uvedeme věty pro jiné tvary kořenů charakteristické rovnice, ale než se dostaneme k dalšímu případu připomeňme si některé důležité pojmy o komplexních číslech. Každé komplexní číslo $\alpha + i\beta \neq 0$ lze vyjádřit pomocí jeho absolutní hodnoty a argumentu v goniometrickém tvaru:

$$r(\cos\omega + i\sin\omega) = \alpha + i\beta, \text{kde } r \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Moivreova věta říká:

$$[r(\cos\omega + i\sin\omega)]^n = r^n(\cos\omega n + i\sin\omega n).$$

Věta 3.21. Pokud má rovnice (3.9) imaginární kořeny $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm i\sin\omega)$, kde $r \neq 0, \omega \neq k\pi, k \in \mathbf{N}$, pak má rovnice (3.8) lineárně nezávislá partikulární řešení:

$$\varphi_1 = r^n \cos\omega n, \quad \text{a} \quad \varphi_2 = r^n \sin\omega n.$$

Poznámka 3.22. Pokud rovnice (3.8) má komplexní řešení $y(n) = u(n) + iv(n)$, potom jsou také posloupnosti $u(n), v(n)$ řešeními této rovnice.

Může nastat případ, kdy máme vícenásobné kořeny $\lambda_i \neq 0$.

Věta 3.23. Pokud má charakteristická rovnice příslušné diferenční rovnice k-tého řadu s-násobný kořen λ_1, kde $1 \leq s \leq k$, potom má diferenční rovnice lineárně nezávislá partikulární řešení tvaru:

$$\varphi_1(n) = \lambda_1^n, \quad \varphi_2(n) = n\lambda_1^n, \quad \cdots \quad \varphi_s(n) = n^{s-1}\lambda_1^n,$$

tedy má za řešení posloupnost

$$\varphi(n) = P_{s-1}(n)\lambda_1^n,$$

kde $P_{s-1}(n)$ je libovolný polynom stupně $s-1$.

Poznámka 3.24. Pokud charakteristická rovnice má s-násobný imaginární kořen tvaru $\lambda_1 = r(\cos\omega + i\sin\omega)$, potom lineárně nezávislá partikulární řešení jsou posloupnosti:

$$\varphi_{1j} = n^{j-1}r^n \cos\omega n \quad \text{a} \quad \varphi_{2j} = n^{j-1}r^n \sin\omega n,$$

pro $j = 1, 2, \cdots, s$.

Dosud jsme se zabývali homogenními rovnicemi, dále ukážeme některé metody řešení nehomogenních diferenčních rovnic, tj. rovnic s pravou stranou:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \cdots + a_k y(n+k) = u(n), \tag{3.10}$$

kde $a_0 \neq 0$ a $a_k \neq 0$ jsou reálné konstanty. Obecné řešení teto rovnice je dáno součtem obecného řešení příslušné homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení rovnice nehomogenní. Jelikož už jsme schopní nalézt řešení homogenní rovnice, teď se soustředíme na hledání partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Tady uvedeme dvě metody na nalezení tohoto řešení. První z nich je *metoda neurčitých koeficientů.*

Tuto metodu lze použít pouze pro speciální tvary pravé strany $u(n)$, a to pro posloupnosti

$$konst, \quad q^n, \quad \sin(bn), \quad \cos(bn), \quad n^k$$

a posloupnosti utvořené součtem nebo součinem z nich. Pro diference $1., 2., \cdots, k$-tého řadu lineární kombinace těchto posloupností jsou posloupnosti téhož typu, navíc to platí i obraceně.

Věta 3.25. Nechť je dána rovnice s konstantními koeficienty:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \cdots + a_k y(n+k) = P_m(n) q^n \cos \alpha n \tag{3.11}$$

kde $P_m(n)$ je polynom stupně $m > 0$.

- Pokud má charakteristická rovnice kořeny $\lambda_j \neq q(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, potom partikulárním řešením diferenční rovnice (3.11) je posloupnost tvaru:

  $$Z(n) = [Q_m(n) \sin \alpha n + R_m(n) \sin \alpha n] q^n,$$

  kde $Q_m(n)$ a $P_m(n)$ jsou jisté polynomy stupně m.

- Pokud má charakteristická rovnice kořen $\lambda_j = q(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, a to s-násobný, $s \geq 0$, potom partikulárním řešením diferenční rovnice (3.11) je posloupnost tvaru:

  $$Z(n) = n^s [Q_m(n) \sin \alpha n + R_m(n) \sin \alpha n] q^n,$$

  kde $Q_m(n)$ a $P_m(n)$ jsou jisté polynomy stupně m.

Analogické tvrzení platí i pro rovnici s funkcí $\sin \alpha n$ na pravé straně.

Při hledání partikulárního řešení nehomogenní rovnice postupujeme tak, že do dané diferenční rovnice dosadíme odhadnutý tvar $Z(n)$ s neurčitými koeficienty, které pak získáme porovnáním s koeficienty pravé strany $u(n)$.

V kapitole 1 jsme uvedli příklad 1.2, který se řeší použitím výše popsané metody. Tento příklad dořešíme.

Sestavili jsme diferenční rovnici

$$y(t+2) - (1-a) y(t) = \frac{q}{2}(2 - a - a(-1)^t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = I$ a $y(1) = I + q$.

Kořeny charakteristické rovnice příslušné homogenní rovnice jsou $\lambda = \pm\sqrt{1-a}$. Potom obecné řešení příslušné homogenní rovnice jsou ve tvaru

$$y_h(t) = C(\sqrt{1-a})^t + D(-\sqrt{1-a})^t.$$

Dále partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(t) = A + B(-1)^t.$$

Najdeme koeficienty $A = \frac{q}{2}\left(\frac{2-a}{a}\right)$ a $B = -\frac{q}{2}$, potom obecné řešení diferenční rovnice je tvaru

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C(\sqrt{1-a})^t + D(-\sqrt{1-a})^t + \frac{q}{2}\left(\frac{2-a}{a} - (-1)^t\right).$$

Dosazením počátečních podmínek $y(0) = I$ a $y(1) = I + q$ dopočítáme koeficienty C a D a zapíšeme obecné řešení diferenční rovnice

$$y(t) = \frac{Ia - q(1-a)}{2a}(\sqrt{1-a})^t \left[(1 + (-1)^t) + \frac{1}{\sqrt{1-a}}(1 - (-1)^t)\right] + \frac{q}{2}\left(\frac{2-a}{a} - (-1)^t\right),$$

kde $t = 0, 1, 2, \cdots$. Všimněme si toho, že pro velké hodnoty t, $y(t)$ osciluje mezi hodnotami $\frac{q}{a} - q$ a $\frac{q}{a}$. Tento příklad byl ukázkou použití metody neurčitých koeficientů.

Poznámka 3.26. Metodu neurčitých koeficientů lze použít i pro případ, že pravá strana je součtem u_1+u_2, kde u_i jsou speciálního tvaru. Díky principu superpozice je partikulární řešení tvaru $Z_1 + Z_2$.

Druhá metoda se nazývá *metodou variace konstant* a je obecná, takže nevyžaduje speciální tvar pravé strany diferenční rovnice. Nechť

$$Y(n) = \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j(n) \tag{3.12}$$

je obecné řešení příslušné homogenní rovnice tvaru

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \cdots + a_k y(n+k) = 0. \tag{3.13}$$

Tato metoda je založená na nahrazení konstant c_j posloupnostmi $c_j(n)$. K určení k neznámých posloupností $c_j(n)$ potřebujeme k rovnic. Jednu máme, další si vhodně zvolíme při tvoření hodnot $Z(n+1), \cdots, Z(n+k)$. Tento proces je dost dlouhý, proto uvedeme pouze soustavu těchto lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(n+1)\Delta c_j(n) &= 0, \\ \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(n+2)\Delta c_j(n) &= 0, \\ &\vdots \\ a_k \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(n+k)\Delta c_j(n) &= u(n). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Věta 3.27. Nechť $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots, \varphi_k(n)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.13). Pokud $c_1(n), c_2(n), \cdots, c_k(n)$ jsou řešením lineární soustavy k rovnic pro k neznámých (3.14). Potom posloupnost

$$Z(n) = \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j(n)$$

je partikulárním řešením rovnice (3.10).

Partikulární řešení nalezené různými metodami nemusí být stejné, protože partikulární řešení není určeno jednoznačně.

Výše jsme se věnovali skalárním rovnicím. Matematické modely ale mnohdy obsahují více závislých proměnných a několik rovnic. Uvažujeme systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}(n)x_1(n) + \cdots + a_{1k}(n)x_k(n) + u_1(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21}(n)x_1(n) + \cdots + a_{2k}(n)x_k(n) + u_2(n) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1}(n)x_1(n) + \cdots + a_{kk}(n)x_k(n) + u_k(n), \end{aligned} \tag{3.15}$$

kde $n \in \mathbf{N}$ a a_{ii} jsou libovolné posloupnosti definované v $\mathbf{N}$.

Věta 3.28. Tento systém zapíšeme ve zjednodušeném tvaru

$$x(n+1) = A(n)x(n) + u(n), \tag{3.16}$$

kde

$$x(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{bmatrix}, \quad A(n) = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & \cdots & a_{1k}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(n) & \cdots & a_{kk}(n) \end{bmatrix}, \quad u(n) = \begin{bmatrix} u_1(n) \\ \vdots \\ u_k(n) \end{bmatrix}.$$

Spolu se systémem uvažujeme rovnici k-tého řádu

$$a_0(n)y(n) + a_1(n)y(n+1) + \cdots + a_k(n)y(n+k) = u(n). \tag{3.17}$$

Věta 3.29. Nechť $y(n)$ je řešením rovnice (3.17). Definujme

$$x_i(n) = y(n+i-1),$$

kde $1 \leq i \leq k, n \in \mathbf{N}$. Potom vektorová funkce $x(n)$ řeší systém (3.16), kde

$$A(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(n)}{a_k(n)} & -\frac{a_1(n)}{a_k(n)} & -\frac{a_2(n)}{a_k(n)} & \cdots & -\frac{a_{k-1}(n)}{a_k(n)} \end{bmatrix}, \quad u(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u(n) \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Věta 3.30. Pokud $x(n)$ je řešením systému (3.16) s $A(n)$ a $u(n)$ nadefinovanými v (3.18), potom $y(n) = x_1(n)$ je řešením rovnice (3.17).

Poznámka 3.31. Pokud máme definovanou počáteční podmínku $x(n_0) = x_0$ pro $n_0 \in \mathbf{Z}$, potom řešení systému (3.16) se dají nalézt iterací pro $x(n_0+1), x(n_0+2), \cdots$.

Věta 3.32. Nehomogenní systém diferenčních rovnic

$$x(n+1) = Ax(n) + u(n),$$

(A je konstantní matice) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ má řešení ve tvaru

$$x(n) = A^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} u(i).$$

4 Teorie stability

Řešení počátečního problému soustavy rovnic n neznámých může být zapsáno jako posloupnost bodů $\{(x_1(n), \cdots, x_k(n))\}_{n=0}^{\infty}$ v $\mathbf{R^k}$. V mnoha aplikacích diferenčních rovnic je důležité a užitečné znát polohu těchto bodů pro velká n a chování funkce na různých intervalech. V populačních modelech představuje nulový bod rovnováhy (také stacionární bod) vyhynutí populace a pozitivní bod rovnováhy představuje přežití populace. Nulový stacionární bod často není požadovaným stavem, ale pokud jde o podíl populace, která je infikována, je takový bod rovnováhy žádoucím. Řešením takových problémů se zabývá teorie stability, o které budeme mluvit v této kapitole a následně ji použijeme při řešení modelu v kapitole 5.

Nejdříve uvedeme některé základní pojmy. Uvažujme systém diferenčních rovnic ve tvaru:

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \qquad x(n_0) = x_0, \tag{4.1}$$

kde $x(n) \in \mathbf{R^k}$, $f : \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{R^k} \to \mathbf{R^k}$ a $f(n, x)$ je spojitá funkce v x.

Definice 4.1. Systém (4.1) se nazývá

autonomní pokud funkce f nezáleží na n: $x(n+1) \equiv f(x(n))$.

periodický pokud pro všechna $n \in \mathbf{Z}$, $f(n+N, x) = f(n, x)$ pro některá celá $N > 0$.

Definice 4.2. Bod x^* v $\mathbf{R^k}$ se nazývá *bodem rovnováhy* (nebo také *stacionárním bodem*) diferenční rovnice, pokud $f(n, x^*) = x^*$ pro všechna $n \geq n_0$.

Poznámka 4.3. Vyšetřování stability bodu rovnováhy lze převést na vyšetřování stability nulového bodu. Skutečně, nechť $y(n) = x(n) - x^*$, potom z (4.1) dostáváme

$$y(n+1) = f(n, y(n) + x^*) - x^*.$$

Všimněme si, že pokud $x^* = x$, pak $y = 0$. Tato transformace usnadní výpočty a používá se, když je bod x^* zadán explicitně. Jinou možnosti je vyšetřování stability přímo v bodě x^*, které je vhodné v případě, že je bod x^* zadán implicitně.

Dále uvedeme některé důležité pojmy teorie stability pro bod rovnováhy x^* a nadefinujeme různé druhy bodů rovnováhy.

Definice 4.4. Bod rovnováhy x^* je

stabilní, pokud pro každé $\varepsilon > 0$, $n_0 > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ takové, že $\|x_0 - x^*\| < \delta$, potom $\|x(n_0) - x^*\| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$.

atraktivní, pokud existuje $\mu = \mu(n_0)$ takové, jestliže $\|x_0 - x^*\| < \mu$, potom $\lim_{n\to\infty} x(n_0) = x^*$.

asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a atraktivní.

Matematické modely jsou často definované pomocí systému nelineárních diferenčních rovnic (4.1). Jednou z možnosti, jak lze tyto modely zkoumat, je linearizace, kterou nyní popíšeme. Nejprve předvedeme příklad linearizace a vyšetřování bodu rovnováhy autonomního systému dvou diferenčních rovnic prvního řádu. Uvažujme systém diferenčních rovnic s bodem rovnováhy (x_1^*, x_2^*)

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f_1(x_1(n), x_2(n)), \\ x_2(n+1) &= f_2(x_1(n), x_2(n)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Než se dostaneme k podmínce stability, linearizujme tento systém v okolí bodu rovnováhy. Předpokládejme, že f_1 a f_2 mají spojité druhé parciální derivace na otevřeném intervalu, který obsahuje (x_1^*, x_2^*). Potom můžeme provést částečný Taylorův rozvoj v bodě (x_1^*, x_2^*) funkce $f_1(x_1, x_2)$

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) +$$

$$+ \frac{\partial f_1^2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2}\frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2!} + \frac{\partial f_1^2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2}\frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2!} + \cdots,$$

kde

$$\frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,x_2)=(x_1^*,x_2^*)}$$

Označíme-li $g_1(x) = \frac{\partial f_1^2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2}\frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2!} + \frac{\partial f_1^2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2}\frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2!} + \cdots$, potom podle výsledku z [2] je splněno

$$\lim_{||x|| \to 0} \frac{|g_1(x)|}{||x||} = 0.$$

Nahradíme $u = x_1 - x_1^*$ a $v = x_2 - x_2^*$, potom aproximujeme

$$f_1(x_1, x_2) \approx x_1^* + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}u + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}v.$$

Obdobným způsobem provedeme Taylorův rozklad a aproximaci pro f_2:

$$f_2(x_1, x_2) \approx x_2^* + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}u + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}v.$$

Nyní přejdeme od zvláštního případu systému o dvou rovnicích k vyšetřování stability řešení systému k-tého řádu. Stabilita řešení systému diferenčních rovnic (4.2) a také systémů vyšších řádů

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{4.3}$$

závisí na chování řešení linearizovaného systému. Předpokládejme, že systém (4.3) má bod rovnováhy x^*. Pokud nadefinujeme $y(n) = x(n) - x^*$, vede linearizace systému (4.3) v okolí bodu x^* na systém

$$y(n+1) = Jy(n), \tag{4.4}$$

kde J - je Jacobiho matice v bodě x^*. Vlastní čísla Jacobiho matice J určují stabilitu nelineárního systému. Všimněme si, že na posouzení stability řešení systému (4.2) potřebujeme pouze vlastní čísla matice J. Vlastní čísla Jacobiho matice jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\det(J - \lambda I) = 0,$$

kde I je jednotková matice. Vlastní čísla jsou tedy řešením charakteristické rovnice k-tého řádu

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0. \tag{4.5}$$

Podmínku stability lze definovat pomocí pojmu spektrální poloměr.

Poznámka 4.5. Spektrální poloměr ρ matice J je definován

$$\rho(J) = \max\{|\lambda_i|\},$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice J.

Věta 4.6. Řešení systému (4.4) je asymptoticky stabilní, právě když spektrální poloměr matice $\rho(J) < 1$. Řešení systému (4.4) je nestabilní, pokud $\rho(J) > 1$.

Z věty 4.6 je vidět, že aby řešení systému (4.4), a tedy i řešení systému (4.3) bylo asymptoticky stabilní, stačí aby platilo $|\lambda_i| < 1$.

Jedním z nástrojů, který budeme používat při popsání modelu je Schurovo-Cohnovo kritérium, které určuje podmínky pro kořeny charakteristické rovnice, aby ležely uvnitř jednotkové kružnice. Toto kritérium je užitečné při posouzení stability lineárních diferenčních rovnic, systémů lineárních rovnic, a tedy i nelineárních systému a plyne z výše uvedených výsledků.

Definice 4.7. (Schurovo–Cohnovo kritérium) Kořeny charakteristické rovnice (4.5) leží uvnitř jednotkové kružnice, právě když:

(i) $p(1) > 0$;

(ii) $(-1)^k p(-1) > 0$;

(iii) matice $(k-1)\times(k-1)$

$$B^{\pm}_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ p_{k-3} & & & & \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & \cdots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & p_k & & & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$$

jsou pozitivně definitní, $k \in \mathbf{N}$. .

Pokud alespoň jedna z těchto podmínek není splněná, potom existuje vlastní číslo $|\lambda_i| \geq 1$. Nejprve rozepíšeme výše uvedené podmínky pro homogenní diferenční rovnici druhého řádu. Příslušná charakteristická rovnice je tvaru:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0.$$

Použitím Schurova–Cohnova kritéria obdržíme podmínky pro posouzení stability:

$$p(1) = 1 + p_1 + p_2 > 0 \qquad (-1)^2 p(-1) = 1 - p_1 + p_2 > 0.$$

Uvedeme všechny podmínky, kdy nulové řešení rovnice je asymptoticky stabilní:

$$1 + p_1 + p_2 > 0, \qquad 1 - p_1 + p_2 > 0, \qquad p_2 < 1.$$

Z třetí podmínky dostaneme, že $p_2 < 1$. Z těchto podmínek plyne následující věta.

Věta 4.8. Řešení diferenční rovnice druhého řádu je asymptoticky stabilní právě když pro koeficienty charakteristické rovnice platí nerovnost

$$|p_1| < 1 + p_2 < 2,$$

Pro naše potřeby je nutno uvést takové podmínky i pro rovnice třetího řádu. Vycházíme ze stejných podmínek jako u případu rovnice druhého řadu a z prvních dvou podmínek dostáváme:

$$1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0, \qquad 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0.$$

Z třetí podmínky obdržíme, že $1 - p_2 + p_1p_3 - p_3^2 > 0$ a $1 + p_2 - p_1p_3 - p_3^2 > 0$.

Věta 4.9. Řešení diferenční rovnice třetího řádu je asymptoticky stabilní, právě když pro koeficienty příslušné charakteristické rovnice platí nerovnosti

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \qquad |p_2 - p_1p_3| < 1 - p_3^2.$$

5 Nicholsonův-Baileyho model

Matematičtí biologové A. J. Nicholson a V. A. Bailey navrhli svůj vlastní populační model hostitel-parazit a v této kapitole tento matematický model rozebereme. Než se dostaneme k samotnému vypracovaní, uvedeme předpoklady:

1. Hostitelé jsou rozmístěni náhodně s hustotou $H(n)$ na jednotku plochy v generaci n;

2. paraziti jsou rozmístěni náhodně a nezávisle, přitom každý z nich má vlastní tzv. oblast objevení a a snese vajíčko u každého hostitele, kterého najde;

3. každý hostitel s parazitem zvětšuje populaci parazitů v generaci $(n+1)$;

4. každý hostitel bez parazitů zvětšuje populaci hostitelů v generaci $(n+1)$;

5. pouze první napadení hostitele parazity je významné.

Dále uvedeme označení, která budeme používat pro popsání systému:

$H(n)$ - hustota rozmístění hostitelů v generaci n;

$P(n)$ - hustota rozmístění parazitů v generaci n;

$f(H(n), P(n))$ - podíl hostitelů, co nebyli napadeni parazity;

λ - koeficient rozmnožování hostitelů;

c - střední hodnota počtu vajíček snesených jedním parazitem do hnízda jednoho hostitele;

$aH(n)$ - počet hostitelů co byli napadeni parazity;

$H_e = aH(n)P(n)$ - celkový počet napadení parazity.

5.1 Základní model

Celý životní cyklus hostitele a parazita lze popsat soustavou diferenčních rovnic, které vyjadřují počet hostitelů a parazitů v generaci $n+1$:

$$H(n+1) = \lambda H(n) f(H(n), P(n)),$$

$$P(n+1) = cH(n)[1 - f(H(n), P(n))].$$

Tento systém rovnic je obecným zápisem pro všechny populační modely hostitel-parazit. Dále nadefinujeme $f(H(n), P(n))$. Pokud μ je střední hodnota výskytu náhodného jevu v určitém časovém intervalu, potom podle Poissonova rozdělení pravděpodobnost výskytu r jevů (jako setkání hostitele a parazita) je

$$p(r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!},$$

kde $\mu = \frac{H_e}{H(n)}$, které vyjadřuje střední počet napadení na jednoho hostitele za jednotku času. Z rovnice $H_e = aH(n)P(n)$ plyne, že $\mu = aP(n)$.

Poznámka 5.1. Náhodná veličina s Poissonovým rozdělením Po(λ) , kde λ je reálné číslo, $\lambda > 0$, má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x = 0, 1, ...$$

Poissonovo rozdělení se obvykle používá pro vyjádření pravděpodobnosti počtu nastoupení sledovaného jevu v určitém časovém intervalu s malou pravděpodobností výskytu.

Pokud je pravděpodobnost uniknout napadení parazitem stejná jako pravděpodobnost, že hostitel parazita během života nepotká, potom $f(H(n), P(n)) = p(0) = e^{-\mu} = e^{-aP(n)}$. Paraziti jsou rozmístěni náhodně a nezávisle a hustota jejich rozmístění je konstantní (to je vyjádřeno koeficientem a). To nás vede na rovnice tvaru:

$$\begin{aligned} H(n+1) &= \lambda H(n)e^{-aP(n)}, \\ P(n+1) &= cH(n)(1 - e^{-aP(n)}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Naším cílem je najít všechny body rovnováhy a posoudit jejich stabilitu. Budeme je hledat ve tvaru:

$$H^* = f(H^*, P^*),$$
$$P^* = f(H^*, P^*).$$

Pokud (H^*, P^*) jsou body rovnováhy, potom je můžeme zapsat do soustavy lineárních rovnic:

$$H^* = \lambda H^* e^{-aP^*},$$
$$P^* = cH^*(1 - e^{-aP^*}).$$

Vypočítáme body rovnováhy:

$$H^* = \frac{\lambda \ln \lambda}{(\lambda - 1)ac}, \qquad P^* = \frac{1}{a}\ln \lambda.$$

Abychom mohli posoudit stabilitu bodů rovnováhy, musíme provést linearizaci. Linearizujeme soustavu diferenčních rovnic (5.1) tak, že

$$x(n+1) = Ax(n),$$

kde $A = (f(H, P), g(H, P))$ je Jacobiho matice. Sestrojíme Jacobiho matici:

$$\begin{pmatrix} \lambda e^{-aP^*} & -a\lambda H^* e^{-aP^*} \\ c(1 - e^{-aP^*}) & acH^* e^{-aP^*} \end{pmatrix}.$$

Pro zkoumání stability vypočítáme determinant Jacobiho matice a pak jej položíme roven nule. Charakteristická rovnice:

$$r^2 - e^{-aP^*}(\lambda + acH^*)r - \lambda acH^* e^{-aP^*} = 0.$$

Použijeme podmínku stability z věty 4.8 $|p_1| < 1 + p_2 < 2$. Pravá strana nerovnosti platí pro všechna λ, ale levou stranu musíme upravit. Rozepišme ji:

$$e^{-aP^*}(\lambda + acH^*) < 1 - \lambda acH^* e^{-aP^*}$$
$$e^{-aP^*}\lambda + e^{-aP^*}acH^* < 1 - \lambda acH^* e^{-aP^*}$$

Dosadíme vypočítané H^* a P^* do nerovnosti a upravíme ji do vhodného tvaru:

$$\frac{\lambda^2 a \ln \lambda}{(\lambda - 1)a} + \lambda + \frac{a\lambda \ln \lambda}{(\lambda - 1)a} < e^{\ln \lambda}$$
$$\frac{(\lambda + 1)\ln \lambda}{\lambda - 1} < 0.$$

Z této nerovnosti plyne, že pro všechny hodnoty λ tato nerovnost nebude platná. To znamená, že podmínka stability není splněná a bod rovnováhy (H^*, P^*) je nestabilní. Proto je potřeba tento model vhodně upravit, neboť se v tomto tvaru nehodí pro aplikaci.

5.2 Realističtější model

Vzhledem k závěrům z předchozí sekce je nutno tento model upravit na realističtější. V tomto případě koeficient rozmnožování λ nahradíme $\lambda(H(n)) = \exp\left[r\left(1 - \frac{H(n)}{K}\right)\right]$ (v anglické literatuře density-dependent factor), který zahrnuje podmínku, že populace hostitelů za nepřítomnosti parazitů roste do určité hodnoty hustoty. Číslo K vyjadřuje nosnou kapacitu prostředí. Nyní sestavíme soustavu diferenčních rovnic v novém tvaru:

$$H(n+1) = H(n)\exp\left[r\left(1 - \frac{H(n)}{K}\right) - aP(n)\right], \quad r > 0, \tag{5.2}$$
$$P(n+1) = cH(n)(1 - \exp(-aP(n))). \tag{5.3}$$

Všimněme si toho, že pokud $P(n) = 0$, potom populace hostitelů $H(n)$ roste do hodnoty K. V případě, že $H(n) > K$ bude populace $H(n)$ klesat. Pokud populace hostitelů neroste příliš rychle (tzn. r není velké), potom existuje asymptoticky stabilní bod rovnováhy.

Poznámka 5.2. Bez újmy na obecnosti lze vzít, že $c = 1$. To lze snadno dokázat. Položme $\tilde{H}(n) = cH(n)$:

$$\frac{\tilde{H}(n+1)}{c} = \frac{\tilde{H}(n)}{c}\exp\left(r\left(1 - \frac{\tilde{H}(n)}{\tilde{K}}\right) - aP(n)\right),$$

$$P(n+1) = \tilde{H}(n)(1 - \exp(-aP(n)),$$

kde $\tilde{K} = cK$.

Stejně jako v předchozím případě potřebujeme najít všechny body rovnováhy a posoudit jejich stabilitu. Upravíme rovnici (5.2):

$$H^* = H^*\exp\left[r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - aP^*\right], \tag{5.4}$$
$$0 = r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - aP^*. \tag{5.5}$$

Z rovnice (5.5) dostaneme:

$$P^* = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{H^*}{K}\right)$$

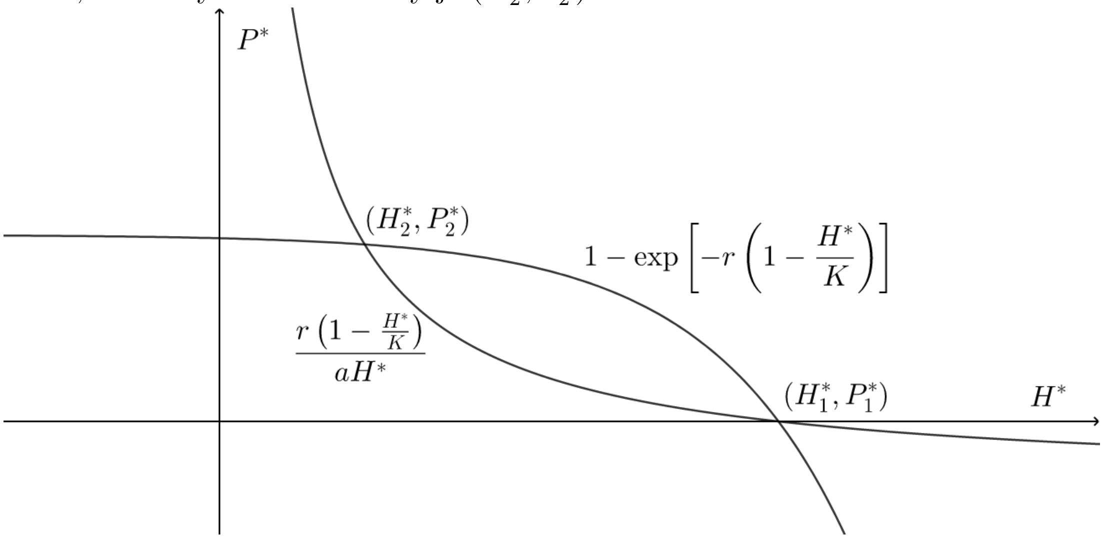
Dosazením do rovnice (5.4) obdržíme:

$$H^* = \frac{P^*}{1 - \exp(-aP^*)},$$

Úpravou rovnice (5.3) dostaneme rovnost:

$$\frac{r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right)}{aH^*} = 1 - \exp\left[-r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right)\right]. \tag{5.6}$$

Jedním z bodů rovnováhy je $(H_1^*, P_1^*) = (K, 0)$. Vykreslíme graf obou stran rovnice (5.6), ze kterého je vidět, že existuje další bod rovnováhy, proto dále pro $0 < H_2^* < K$ budeme uvažovat, že druhý bod rovnováhy je (H_2^*, P_2^*).



Abychom mohli analyzovat stabilitu bodů rovnováhy, vyjádříme $H(n)$ a $P(n)$. Používáme k tomu teoretické znalosti z kapitoly 4. Lze říct, že vyšetřování stability bodu rovnováhy převádíme na úlohu vyšetřování stability v nulovém bodě:

$$H(n) = x(n) + H_2^*,$$

$$P(n) = y(n) + P_2^*.$$

Nyní dosadíme $H(n)$ a $P(n)$ do soustavy diferenčních rovnic (5.2), (5.3) a dostaneme novou soustavu:

$$x(n+1) = -H_2^* + (x(n) + H_2^*)\exp\left[r\left(1 - \frac{x(n) + H_2^*}{K}\right) - a(y(n) + P_2^*)\right];$$

$$y(n+1) = -P_2^* + (x(n) + H_2^*)(1 - \exp(-a(y(n) + P_2^*))).$$

Stejně jako v předchozím případě provedeme linearizaci v okolí bodu $(0,0)$ pomocí nástrojů uvedených v kapitole 4. Označíme

$$q = \frac{H_2^*}{K}, \qquad \varphi = \frac{r(1-q)}{1 - \exp(-r(1-q))}$$

pro zjednodušení výpočtů. Koeficient q je poměr ustálené hustoty s a bez přítomnosti parazitů. Linearizovaný systém dále řešíme pomocí teorie, uvedené v kapitole 4. A je Jacobiho matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - rq & -aKq \\ 1 - \exp(-r(1-q)) & \varphi - r(1-q) \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice $|A - \lambda E| = 0$ má potom tvar:

$$\lambda^2 - (1 - r + \varphi)\lambda + \varphi(1 - rq) + r^2 q(1 - q) = 0.$$

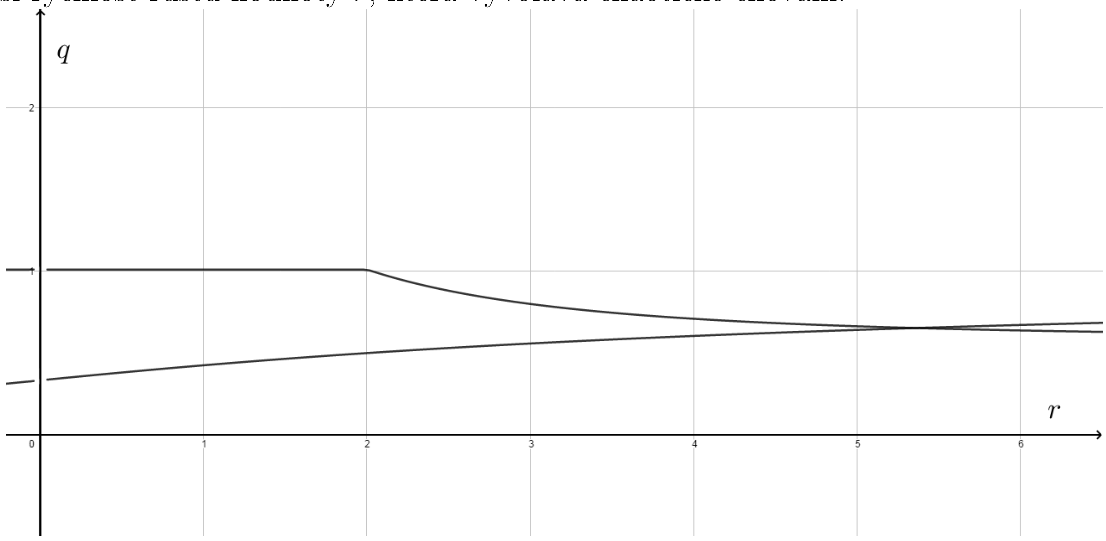
Posoudíme stabilitu podle kritéria, které jsme uvedli výše v větě 4.9:

$$|1 - r + \varphi| < 1 + (1 - rq)\varphi + r^2 q(1 - q) < 2.$$

Rozložíme tuto nerovnost na dvě jednodušší nerovnosti:

$$\begin{gathered} (1 - rq)\varphi + r^2 q(1 - q) < 1 \\ 1 + (1 - rq)\varphi + r^2 q(1 - q) > |1 - r + \varphi| \end{gathered}$$

Vykreslíme graf, který znázorňuje závislost q na r , kde oblast mezi křivkami je oblast, ve které bod rovnováhy je asymptoticky stabilní. Pro každou hodnotu r existuje řada hodnot q pro které je řešení stabilní. Je vidět, že s rostoucí hodnotou r se oblast, kde je řešení stabilní, zmenšuje. Můžeme říct, že čím je větší vliv parazitů na jejich hostitele, tím je nižší rychlost růstu hodnoty r, která vyvolává chaotické chování.



I tento model lze zlepšit, vezmeme-li v úvahu vlastnosti prostředí, ve kterém se populace nachází.

5.3 Komplikovanější model

Rozšíříme předchozí model pro případ moučných brouků. K popisu uvedeme stručné informace o životním cyklu brouků. Životní cyklus se skládá z etapy larvy a etapy kukly. Každá z fází trvá přibližně dva týdny a po nich následuje fáze dospělého brouka. Taky se v různých fázích vyskytuje kanibalismus. Dospělci jedí kukly a vejce, larvy jedí vejce. Ani larvy ani dospělci nejedí zralé dospělé jedince. Také larvy nejedí larvy. Kanibalismus v ostatních případech je zanedbatelný a je spíše výjimkou. Označíme $L(n)$ - populace larev v čase n, $P(n)$ - populace kukel v čase n, $A(n)$ - dospělá populace v čase n. Popíšeme tento životní cyklus moučných brouků pomocí soustavy diferenčních rovnic:

$$\begin{aligned} L(n+1) &= bA(n)\exp(-c_{EA}A(n) - c_{EL}L(n)); \\ P(n+1) &= (1 - \mu_L)L(n); \\ A(n+1) &= P(n)\exp(-c_{PA}A(n)) + (1 - \mu_A)A(n), \end{aligned} \tag{5.7}$$

kde

$L(0) \geq 0$, $P(0) \geq 0$ a $A(0) \geq 0$;

μ_L - pravděpodobnost, že larva umře jiným způsobem než v důsledku kanibalismu, $0 \leq \mu_L \leq 1$;

μ_A - pravděpodobnost, že dospělý brouk umře jiným způsobem než v důsledku kanibalismu, $0 \leq \mu_A \leq 1$;

$(-c_{EA}A(n))$ - pravděpodobnost, že vajíčko nebude snědeno $A(n)$ dospělými brouky;

$(-c_{EL}L(n))$ - pravděpodobnost, že vajíčko nebude snědeno $L(n)$ larvami;

$(-c_{PA}A(n))$ - pravděpodobnost přežití kukly v přítomnosti $A(n)$ dospělých brouků.

$c_{EA} \geq 0$, $c_{EL} \geq 0$ a $c_{PA} \geq 0$ jsou konstantní koeficienty kanibalismu. Budeme předpokládat, že kanibalismus dospělců je jedinou významnou příčinou úmrtnosti kukel.

Analogicky, jako u předchozích modelů, potřebujeme nalézt body rovnováhy a poté prozkoumat chování jejich řešení. Uvažujeme dva body rovnováhy, první je nulový $(0, 0, 0)$ a druhý je $(L^*, P^*, A^*) \in \mathbf{R}^{\mathbf{3}}_{+}$, kde $L^* \geq 0$, $P^* \geq 0$ a $A^* \geq 0$. Nenulový bod rovnováhy hledáme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} L &= bA \exp(-c_{EA}A - c_{EL}L); \\ P &= (1 - \mu_L)L; \\ A\mu_A \exp(c_{PA}A) &= P, \end{aligned}$$

Řešení tohoto systému je založeno na jednoduchých úpravách, proto si dovolíme tyto výpočty vypustit a dostáváme rovnost

$$\exp(c_{EL}L) = \frac{b(1-\mu_L)}{\mu_A} \exp((-c_{EA} - c_{PA})A). \tag{5.8}$$

Dále je důležité zavedení pojmu *vlastní reprodukční číslo*, které nám usnadní zkoumání stability daného modelu:

$$N = \frac{b(1-\mu_L)}{\mu_A}.$$

Toto číslo bude hrát významnou roli při analýze stability. Uvědomme si, že pokud $N < 1$, rovnice (5.8) nemá řešení a tedy nemáme žádný pozitivní rovnovážný bod. Nicméně, pokud $N > 1$, pak rovnice má řešení. Pro analýzu stability musíme vypočítat Jacobiho matici J pro soustavu (5.7):

$$J = \begin{pmatrix} -c_{EL}bA \exp(-c_{EA}A - c_{EL}L) & 0 & b(1 - Ac_{EA}) \exp(-c_{EA}A - c_{EL}L) \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-c_{PA}A) & -c_{PA} \exp(-c_{PA}A) + 1 - \mu_A \end{pmatrix}$$

Jacobiho matice pro nulový bod rovnováhy $(0, 0, 0)$ je:

$$J_1 = J\,|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \mu_A \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice je tudíž tvaru:

$$\lambda^3 - (1-\mu_A)\lambda^2 - b(1-\mu_L) = 0.$$

Na posouzení stability použijeme podmínky stability, které jsou uvedené ve větě 4.9.

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \qquad |p_2 - p_1 p_3| < 1 - p_3^2.$$

Z těchto podmínek vyplývá, že řešení v nulovém bodě rovnováhy je asymptoticky stabilní právě když

$$N = \frac{b(1-\mu_L)}{\mu_A} < 1.$$

Pro hodnoty $N > 1$ existuje pouze jeden bod rovnováhy. Pro $(L^*, P^*, A^*) \in \mathbf{R^3}$ Jacobiho matice je:

$$J_2 = J\,|_{(L^*,P^*,A^*)} = \begin{pmatrix} -c_{EL}L^* & 0 & \frac{L^*}{A^*} - c_{EA}L^*) \\ 1-\mu_L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^*\mu_A}{(1-\mu_L)L^*} & 1-\mu_A - c_{PA}A^*\mu_A \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice pro tento bod rovnováhy je:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (-c_{EL}L^* - c_{PA}A^*\mu_A + 1 - \mu_A)\lambda^2 + (-c_{EL}L^*)(1-\mu_A - c_{PA}A^*\mu_A)\lambda \\ + (1-\mu_L)\left(\frac{L^*}{A^*} - c_{EA}L^*\right)\left(\frac{A^*\mu_A}{(1-\mu_L)L^*}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Z věty 4.9 řešení systému (5.7) je asymptoticky stabilní pokud jsou splněny podmínky

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \qquad |p_2 - p_1 p_3| < 1 - p_3^2.$$

Určit tyto podmínky z rovnice (5.9) je poměrně těžké. Ale vhodnou volbou některých koeficientů lze hledání těchto podmínek usnadnit. Také je možné najít závislost chování řešení na čísle N. Například při $\mu_A = 1$, pro $N > 0$ nulový bod rovnováhy je nestabilní a existuje jediný kladný bod rovnováhy. Ten bod je nestabilní v okolí $N = 1$. Experimentálně lze přijít na nějaké body rovnováhy, my se ale v této práci už tímto nesnadným problémem zabývat nebudeme. V novějších vydáních [2] jsou uvedeny některé případy těchto podmínek (podle zvolených hodnot koeficientů) a prozkoumané body stability.

Závěr

V této bakalářské práci jsme se věnovali diferenčnímu počtu a diferenčním rovnicím, které se využívají při řešení problémů, majících diskrétní charakter. Nejprve jsme zavedli důležité pojmy z teorie diferenčního počtu a našli jsme některé analogie a rozdílnosti s diferenciálním počtem. Dále jsme provedli porovnání způsobů řešení diferenčních a diferenciálních rovnic a ukázali jsme, že v některých aspektech mohou být diferenční rovnice chápány jako diskrétní protějšky rovnic diferenciálních. Poté jsme zavedli vybrané pojmy z teorie stability, které jsme později použili při zkoumáni matematického modelu. Konkrétně jsme se věnovali modelu hostitel–parazit, který navrhli matematičtí biologové A.J.Nicholson a V.A.Bailey. Tento model je čistě diskrétní, řeší se tedy pomocí diferenčních rovnic. Popsali jsme dvě varianty tohoto modelu, přičemž druhá z nich byla realističtější podobou první. U těchto případů jsme také zkoumali stabilitu jejich řešení pomocí výsledků z kapitoly věnované teorii stability. Uvedli jsme také komplikovanější model a opět jsme odvodili podmínky stability. Ukázali jsme, že různou volbou koeficientů lze ovlivnit chování řešení těchto modelů. V této oblasti je řada dalších (i otevřených) problémů, což může být podkladem pro téma diplomové práce.

Literatura

[1] KELLEY, W. a A. Peterson, Difference Equations, An Introduction with Applications. Academic Press, 2000.

[2] ELAYDI, S. An Introduction to Difference Equations. Springer, 2005.

[3] PRÁGEROVÁ, A. Diferenční rovnice. Polytechnická knižnice, 1971.

[4] EDELSTEIN-KESHET, L. Mathematical Models in Biology. SIAM, 2004.

[5] ALLEN, Linda J.S. An Introduction to mathematical biology. Pearson Prentice Hall, 2007.

[6] VRIES, Gerda de, T. Hillen, M. Lewis, J. Muller, B. Schonfisch, A Course in Mathematical Biology. SIAM, 2006.